

$$Z = \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{E_n}{k_B T}\right). \quad \text{Eşitlik 1}$$

Hemen üstteki Eşitlik 1 ile (**) yazımızdaki Eşitlik 1'in paydasının benzerliğine dikkat etmekte yarar var. Ne ki, toplamın sınırlı değil sınırsız ∞ olması, sınırlı sayıdaki özdeksel (maddi) parçacıklar için değil de sınırsız sayıdaki fotonlar için yazılmış olmasıdır.

Daha açık ifadelerle; bu yazıdaki Eşitlik 1'de

n değeri, bazı özel alt kriterlerce belirlenmiş fotonların oluşturduğu mikro durumları ('microstate') belirleyen indistir (indis=sayı);

k_B eskisi gibi, Boltzmann sabitidir;

E_n değeri de ilgili mikro durumun toplam enerjisidir.

Minik not: $\frac{1}{k_B T}$ değeri çoğu zaman Boltzmann faktörü olarak tanımlanır ve β harfi ile gösterilir.

Böylelikle Eşitlik 1 sadeleşmiş olur;

$$Z = \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-\beta E_n). \quad \text{Eşitlik 2}$$

Demek ki, herhangi bir fotonun E_n enerjisine sahip olma olasılığı $p(n)$ şöylece bulunabilir

$$p(n) = \frac{\exp(-\beta E_n)}{\sum_{n=1}^{\infty} \exp(-\beta E_n)} = \frac{\exp(-\beta E_n)}{Z}. \quad \text{Eşitlik 3}$$

Dikkatli okuyucu bu yazıda Eşitlik 1'den beri enerjinin paketçikli ('quantized') olarak alındığını fark etmiş olmalıdır. Şimdi bir adım daha gidip, fotonun frekansı ν ile enerjisini bağdaştıralım;

$$E = h\nu. \quad \text{Eşitlik 4}$$

Eşitlik 4'deki h harfi Planck sabitini simgelemektedir ve paketçiklenmiş enerjiler için

$$E_n = nh\nu \quad \text{Eşitlik 5}$$

yazılabilir.

Bütün bunlardan sonra, sistemdeki tüm fotonlardan sadece ν frekansına sahip olanların ortalama enerjisi $\langle E_\nu \rangle$ şöylece hesaplanabilir:

$$\langle E_\nu \rangle = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} (nh\nu) \exp(-n\beta h\nu)}{\sum_{n=1}^{\infty} \exp(-n\beta h\nu)} \quad \text{Eşitlik 5}$$

ki, bu da (**) yazımızdaki Eşitlik 2 ile ışıma yeğinliği olarak tanımlanmış değere eşittir. Oradaki ışıma yeğinliğine yani Planck'ın karacisim ışıma formülüne giden yol şu basit gözlemden geçer; buradaki Eşitlik 5'in payındaki yani kesir çizgisinin üst tarafındaki ifade paydanın yani kesir çizgisinin altındaki ifadenin yanının yanisi, az yukarıda Eşitlik 1 ile tanımlanmış Z ifadesinin β ya göre alınmış türevidir.

Demek ki,

$$\langle E_\nu \rangle = \frac{\frac{\partial Z}{\partial \beta}}{Z} = \frac{\partial \ln(Z)}{\partial \beta} \quad \text{Eşitlik 6}$$

olarak yalınlaştırılabilir. Eşitlik 6'da $\ln$ simgesi (e tabanına göre alınan) doğal logaritmayı temsil etmektedir.

Eh, elimizde şu an bir nal var ve işimiz üç nalla bir ata kalmış demektir. Yani, Eşitlik 1'deki Z 'yi hesaplayabildikten sonra işin sonuna hayli yaklaşmış olabiliriz.

Eşitlik 2'den anımsayalım ki,

$$Z = \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-\beta E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-n\beta h\nu) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\beta h\nu} \quad \text{Eşitlik 7}$$

şeklinde yazılabilir.

A_aaa! O da ne!? Doğru mu görmekteyiz?

$$Z = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\beta h\nu} = \sum_{n=1}^{\infty} (e^{-\beta h\nu})^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{e^{\beta h\nu}}\right)^n \quad \text{Eşitlik 8}$$

Eşitlik 8 tamı tamına ve de tıpa tıp Zenovari bölünmeler formülü! Böyle değil mi?

Bir de gözlerimizi ovuşturup bakalım bakalım;

$$Z = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{e^{\beta h\nu}}\right)^n = \frac{1}{e^{\beta h\nu}} + \left(\frac{1}{e^{\beta h\nu}}\right)^2 + \left(\frac{1}{e^{\beta h\nu}}\right)^3 + \dots \quad \text{Eşitlik 9}$$

Eşitlik 9'u yalınlaştırmak amacıyla değişken değiştirelim ve diyelim ki,

$$r = \frac{1}{e^{\beta h\nu}} \quad \text{Eşitlik 10}$$

olsun. Böyle olunca, Z de şöyle olur;

$$Z = r + r^2 + r^3 + \dots \quad \text{Eşitlik 11}$$

$$Z = r(1 + r + r^2 + r^3 + \dots) \quad \text{Eşitlik 12}$$

$$Z = r(1 + Z) \quad \text{Eşitlik 13}$$

ve nihayet

$$Z = \frac{r}{1-r} = \frac{\frac{1}{e^{\beta h\nu}}}{1 - \frac{1}{e^{\beta h\nu}}} = \frac{1}{e^{\beta h\nu} - 1} \quad \text{Eşitlik 14}$$