Permütasyonlar ve Oyunlar

Gökhan Benli

Orta Doğu Teknik Üniversitesi

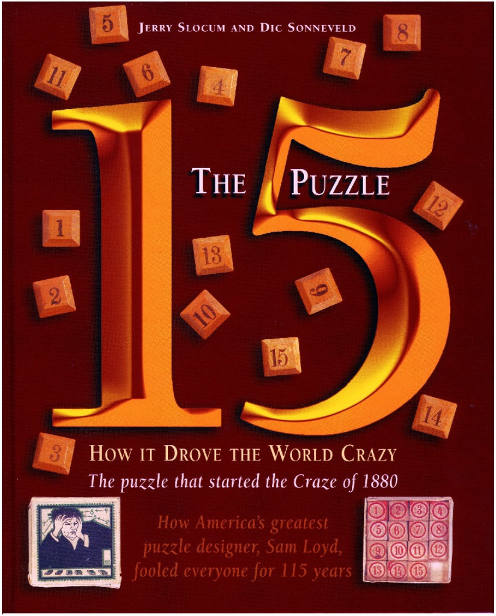
15 Bulmacası (The 15 Puzzle)

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

15 Bulmacası (The 15 Puzzle)

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

Kaynakça

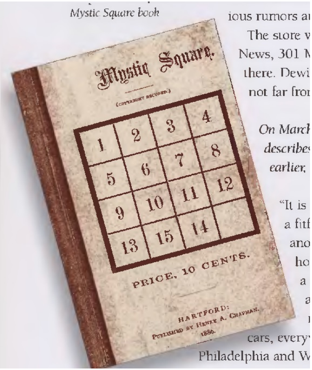

JERRY SLOCUM AND DIC SONNEVELD
15
THE PUZZLE
HOW IT DROVE THE WORLD CRAZY
The puzzle that started the Craze of 1880
How America's greatest puzzle designer, Sam Loyd, fooled everyone for 115 years


THE GEM PUZZLE. No. 0
1 2 3 4
5 6 7 8
9 10 11 12
13 14 15

Tarihçe

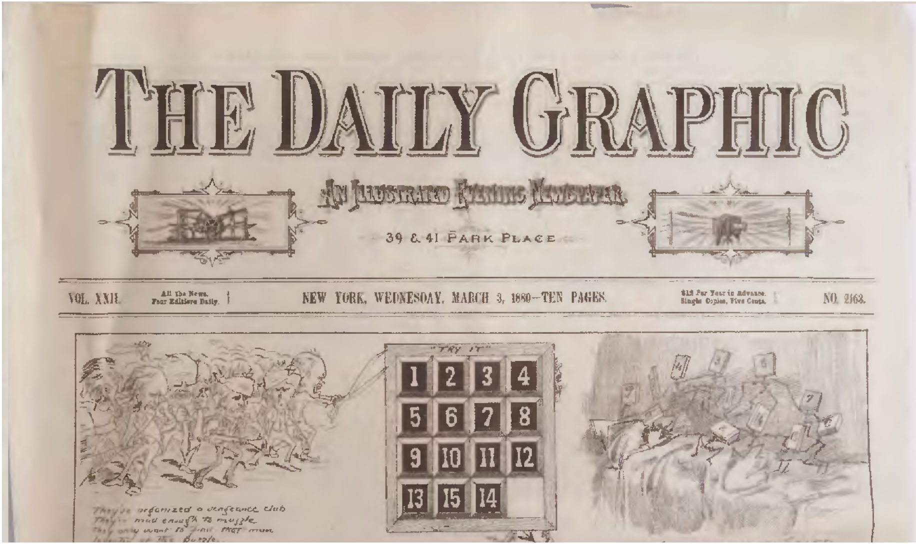
THE POPULAR
15
PUZZLE

J.C.Dungey.Esq.
THE GREATEST SUCCESS OF THE SEASON
THE
NEW GAME
Waltz Elegante
BY
JAS.J.FREEMAN.
NEW YORK
PUBLISHED BY S.T.Gordon&Son.13EAST14thSt.



Mystic Square book
Mystic Square.
PRICE, 10 CENTS.
HARTFORD:
PUBLISHED BY HENRY A. CHAPMAN.
1880.

Tarihçe


THE DAILY GRAPHIC

AN ILLUSTRATED EVENING NEWSPAPER.

39 & 41 PARK PLACE

VOL. XXII. — All the News. Four Editions Daily. — NEW YORK, WEDNESDAY, MARCH 3, 1880—TEN PAGES. — $12 Per Year in Advance. Single Copies, Five Cents. — NO. 2163.

"TRY IT"

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

They've organized a vengeance club

They're mad enough to muzzle


THE 14-15 PUZZLE IN PUZZLELAND
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
15
14

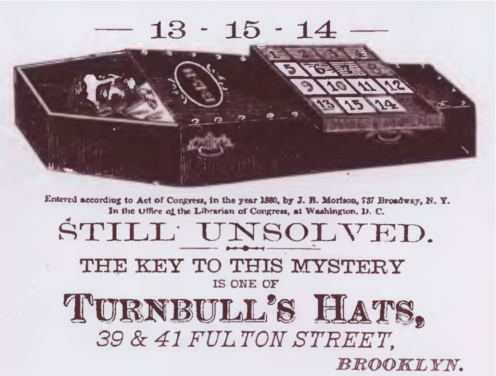
Tarihçe

PUCK.
5
15—14 13.
ITS EFFECT UPON THE COMMUNITY AT LARGE.
["This Little Puzzle Looks Easy, But Try it Once."]
Passenger:—"Why has the train stopped, conductor?"
Conductor:—"Engineer and brakemen working the new puzzle, sir."
The puzzle on the Broadway stage
The puzzle in church.
TELLER
A deadlock at the bank and—
The cause—the cashier was working the puzzle.


LUNATIC ASYLUM
STANDING ROOM ONLY!
The lunatic asylums are full.
The old man thought his daughter and young Chips were getting entirely too thick -
But it appeared that they were only trying to work the puzzle.
The latest steamboat explosion. Cause—the pilot and all hands were working the puzzle.
The reason why the old man of Gramercy Park has been so quiet of late.
1 2 3 4
5 6 7 8
9 10 11 12
13 14 15
But Puck gets it the first time.

Tarihçe


THE GAME of FIFTEEN
1 2 3 4
5 6 7 8
9 10 11 12
13 15 14
SOLVED BY THE
VERY MERRY MARINER


— 13 - 15 - 14 —
Entered according to Act of Congress, in the year 1880, by J. B. Morison, 737 Broadway, N. Y.
In the Office of the Librarian of Congress, at Washington, D. C.
STILL UNSOLVED.
THE KEY TO THIS MYSTERY
IS ONE OF
TURNBULL'S HATS,
39 & 41 FULTON STREET,
BROOKLYN.

Tarihçe


THE FIFTEEN PUZZLE CRAZE
Far left: Gem Puzzle music.
Left: The Fifteen Puzzle Polka.
Below left: The Fifteen Puzzle, by George Meen was included in "The Forty Thieves", a British burlesque drama.
Below: Fred Jewell's Comic Fifteen Puzzle song with words by Frederick A. Jewell.
THE GEM PUZZLE
BY
M. F. HUSE.
BOSTON
OLIVER DITSON & COMPANY.
STEP BY STEP
COLLECTION OF EASY PIECES
CH. NEILSON.
THE FIFTEEN PUZZLE POLKA
PHILADELPHIA
THE FIFTEEN PUZZLE,
J. J. DALLAS,
GEORGE MEEN.
TONY PASTOR
New York.
13—15—14
Comic
Song
Music by
FRED. A. JEWELL.
Words by
WM. F. BACON.
BOSTON:
GEO. W. RICHARDSON & CO.,
47

Tarihçe

A poem published by the NEW YORK MAIL indicates the frustration some people feel when trying to solve the Fifteen Puzzle:

13—15—14.
Let's muzzle
The puzzle
Inventor.
Let's take him
And shake him
Instanter.
Let's break
All his bones
Let's make
What he owns
Of intellectual twirl
In perpetual whirl.
As our
Mind power
Is hurt by this mean,
Eternal
Infernal
Gem puzzle machine.
N.Y. Mail,

Baltimore Morning Herald, March 6, 1880.

Another poem published in COLORADO DAILY GAZETTE, shows the same feeling of frustration occurs in the West:

13—15—14!
He sat and gazed with placid mien
And a cheerful and confident smile
At the little square box with the "gem fifteen,"
And he said he'd bet his pile
That he could figger it out right thar;
So he jumbled the blocks about,
And then he remarked: "it's simple, I swar,
And I recon I'll work it out"
So he tackled it sharp for an hour or more,
And his hands he ran through his hair.
As he jumped right up and fearfully swore,
And his eyes had a maniac's glare,
That he's "be dashed if the dash dashed fool
That invented this game was here,
He'd smash his dash, dash, dashed skull
And chaw off an end of his ear."
But after another hot hour had flown
The bead drops down 'gan to roll,
And he raved in a way that, the people all say.
Struck terror to each watching soul.
For – thirteen—fifteen—fourteen—alas!
Were all that he got for his pains,
So he frantically swallowed of poison a glass.
And with a bullet he bored out his brains.

Daily Gazette , Colorado, March 1880.

Tarihçe

15—14—13.—THE GREAT PRESIDENTIAL PUZZLE.


EVEN THE BIG BOYS ARE AT IT

Tarihçe

Fig. 1.33 This Austrian ad credits the Fifteen Puzzle invention to a deaf mute.

Right: Fatalen Fünfzehn. Neues Geduldspiel. Germany.

Fig. 1.32 Riga, Latvia ad for the 15.

Tarihçe

A Prize Offered!

THE 15 PUZZLE.

WHO CAN DO IT?

I Offer a Set of

$25.00

TEETH, "The Best" on Rubber or Celluloid, and made by MY NEW IMPRESSION, warranted and perfectly adjusted, to the Successful Competitor.

OPEN TO THE WHOLE WORLD.

Set the numbers in regular order, from 1 to 15, then transpose Nos. 14 and 15 and proceed.

This offer stands good for one month.

Dr. Charles K. Pevey,

Pevey's Dental Rooms, Worcester, Mass.

The Daily Spy; Worc

A Prize Offered.

THE "15" PUZZLE.

WHO CAN DO IT?

I Offer a Set of $25.00 Teeth,

"THE BEST,"

on Rubber or Celluloid, and made by my NEW IMPRESSION, warranted and perfectly adjusted,

AND $100 CASH,

To the Successful Competitor.

Open to the whole world.

Set the numbers in regular order, from 1 to 15, then transpose Nos. 14 and 15 and proceed. When finished the blank must be after the No. 15.

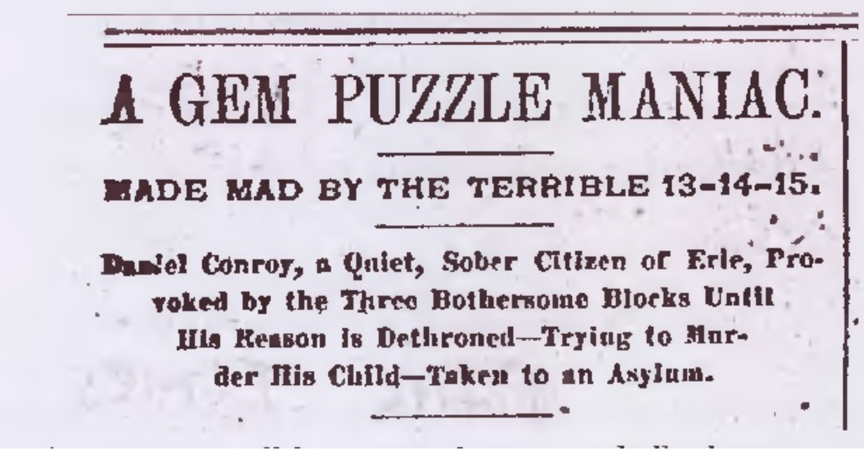
This offer stands good for one month.

DR. CHAS. K. PEVEY,

Pevey's Dental Rooms,

WORCESTER, MASS.

Tarihçe



A GEM PUZZLE MANIAC.

MADE MAD BY THE TERRIBLE 13-14-15.

Daniel Conroy, a Quiet, Sober Citizen of Erie, Provoked by the Three Bothersome Blocks Until His Reason is Dethroned—Trying to Murder His Child—Taken to an Asylum.

Tarihçe

Mart 1880, Notes on the "15" Puzzle

American Journal of Mathematics, Vol. 2, No. 4. 397-404

Woolsey Johnson and William E. Story.

Permütasyonlar

S sonlu elemanı olan bir küme olsun.

Permütasyonlar

S sonlu elemanı olan bir küme olsun. S den S kümesine tanımlanmış birebir ve örten her fonksiyona S nin bir **permütasyonu** denir.

S sonlu elemanı olan bir küme olsun. S den S kümesine tanımlanmış birebir ve örten her fonksiyona S nin bir **permütasyonu** denir.

Örnek: $S = \{A, B, C, D\}$ olsun.

S sonlu elemanı olan bir küme olsun. S den S kümesine tanımlanmış birebir ve örten her fonksiyona S nin bir **permütasyonu** denir.

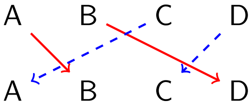
Örnek: $S = \{A, B, C, D\}$ olsun.

$f(A) = B, f(B) = D, f(C) = A, f(D) = C$ şeklinde tanımlanan $f : S \to S$ fonksiyonu S'nin bir permütasyonudur.

S sonlu elemanı olan bir küme olsun. S den S kümesine tanımlanmış birebir ve örten her fonksiyona S nin bir **permütasyonu** denir.

Örnek: $S = \{A, B, C, D\}$ olsun.

$f(A) = B, f(B) = D, f(C) = A, f(D) = C$ şeklinde tanımlanan $f : S \rightarrow S$ fonksiyonu S'nin bir permütasyonudur.

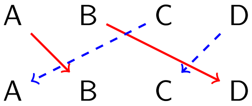


Permütasyonlar

S sonlu elemanı olan bir küme olsun. S den S kümesine tanımlanmış birebir ve örten her fonksiyona S nin bir **permütasyonu** denir.

Örnek: $S = \{A, B, C, D\}$ olsun.

$f(A) = B, f(B) = D, f(C) = A, f(D) = C$ şeklinde tanımlanan $f : S \to S$ fonksiyonu S'nin bir permütasyonudur.



$$f = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ B & D & A & C \end{pmatrix}$$

Permütasyonlar

$S = \{1, 2, \ldots, n\}$ olsun.

$S = \{1, 2, \ldots, n\}$ olsun. S nin her permütasyonunu

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ f(1) & f(2) & f(3) & \cdots & f(n) \end{pmatrix}$$

şeklinde gösterebiliriz.

Permütasyonlar

$S = \{1, 2, \ldots, n\}$ olsun. S nin her permütasyonunu

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ f(1) & f(2) & f(3) & \cdots & f(n) \end{pmatrix}$$

şeklinde gösterebiliriz.

S'nin permütasyonlarının sayısı $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$'dir.

$S = \{1, 2, \ldots, n\}$ olsun. S nin her permütasyonunu

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ f(1) & f(2) & f(3) & \cdots & f(n) \end{pmatrix}$$

şeklinde gösterebiliriz.

S'nin permütasyonlarının sayısı $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$'dir.

Permütasyonları çarpabiliriz, örneğin:

Permütasyonlar

$S = \{1, 2, \ldots, n\}$ olsun. S nin her permütasyonunu

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ f(1) & f(2) & f(3) & \cdots & f(n) \end{pmatrix}$$

şeklinde gösterebiliriz.

S'nin permütasyonlarının sayısı $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$'dir.

Permütasyonları çarpabiliriz, örneğin:

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

$S = \{1, 2, \ldots, n\}$ olsun. S nin her permütasyonunu

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ f(1) & f(2) & f(3) & \cdots & f(n) \end{pmatrix}$$

şeklinde gösterebiliriz.

S'nin permütasyonlarının sayısı $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$'dir.

Permütasyonları çarpabiliriz, örneğin:

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

için

$S = \{1, 2, \ldots, n\}$ olsun. S nin her permütasyonunu

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ f(1) & f(2) & f(3) & \cdots & f(n) \end{pmatrix}$$

şeklinde gösterebiliriz.

S'nin permütasyonlarının sayısı $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$'dir.

Permütasyonları çarpabiliriz, örneğin:

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

için

$$f \cdot g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$S = \{1, 2, \dots, n\}$ olsun. S nin her permütasyonunu

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ f(1) & f(2) & f(3) & \cdots & f(n) \end{pmatrix}$$

şeklinde gösterebiliriz.

S'nin permütasyonlarının sayısı $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$'dir.

Permütasyonları çarpabiliriz, örneğin:

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

için

$$f \cdot g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad g \cdot f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Permütasyonlar

$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix}$ permütasyonuna **birim** permütasyon diyelim.

Permütasyonlar

$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix}$ permütasyonuna **birim** permütasyon diyelim.

Herhangi bir f permütasyonu için $f \cdot e = f$ ve $e \cdot f = f$ olur.

Permütasyonlar

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix}$$ permütasyonuna **birim** permütasyon diyelim.

Herhangi bir f permütasyonu için $f \cdot e = f$ ve $e \cdot f = f$ olur.

Her permütasyonun tersi vardır:

Permütasyonlar

$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix}$ permütasyonuna **birim** permütasyon diyelim.

Herhangi bir f permütasyonu için $f \cdot e = f$ ve $e \cdot f = f$ olur.

Her permütasyonun tersi vardır:

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix}$ permütasyonuna **birim** permütasyon diyelim.

Herhangi bir f permütasyonu için $f \cdot e = f$ ve $e \cdot f = f$ olur.

Her permütasyonun tersi vardır:

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad f^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Permütasyonlar

$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix}$ permütasyonuna **birim** permütasyon diyelim.

Herhangi bir f permütasyonu için $f \cdot e = f$ ve $e \cdot f = f$ olur.

Her permütasyonun tersi vardır:

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad f^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$f \cdot f^{-1} = f^{-1} \cdot f = e.$

Döngüler

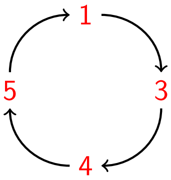
$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 4 & 5 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

Döngüler

$$f = \begin{pmatrix} \color{red}{1} & 2 & \color{red}{3} & \color{red}{4} & \color{red}{5} & 6 \\ \color{red}{3} & 2 & \color{red}{4} & \color{red}{5} & \color{red}{1} & 6 \end{pmatrix}$$

Döngüler

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 4 & 5 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$



Döngüler

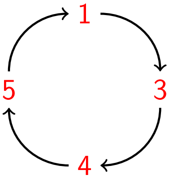
$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 4 & 5 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{tikzcd} & 1 \arrow[dr, bend left] & \\ 5 \arrow[ur, bend left] & & 3 \arrow[dl, bend left] \\ & 4 \arrow[ul, bend left] & \end{tikzcd}$$

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 7 & 5 & 3 & 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

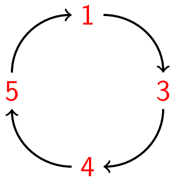
Döngüler

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 4 & 5 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

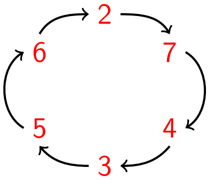


$$g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 7 & 5 & 3 & 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

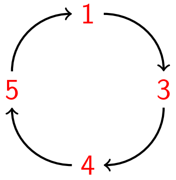
$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 4 & 5 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$



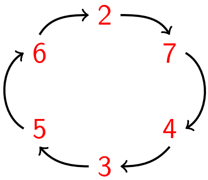
$$g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 7 & 5 & 3 & 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$



$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 4 & 5 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$



$$g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 7 & 5 & 3 & 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$



Bu tip permütasyonlara **döngü** diyelim.

Döngüleri $f = (1,3,4,5)$ ve $g = (2,7,4,3,5,6)$ şeklinde gösterelim.

Döngüler

Teorem

Her permütasyon döngülerin çarpımı olarak, sadece bir şekilde, yazılabilir.

Döngüler

Teorem

Her permütasyon döngülerin çarpımı olarak, sadece bir şekilde, yazılabilir.

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 4 & 6 & 7 & 5 & 1 & 3 & 2 & 10 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Döngüler

Teorem

Her permütasyon döngülerin çarpımı olarak, sadece bir şekilde, yazılabilir.

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 4 & 6 & 7 & 5 & 1 & 3 & 2 & 10 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Döngüler

Teorem

Her permütasyon döngülerin çarpımı olarak, sadece bir şekilde, yazılabilir.

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 4 & 6 & 7 & 5 & 1 & 3 & 2 & 10 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Döngüler

Teorem

Her permütasyon döngülerin çarpımı olarak, sadece bir şekilde, yazılabilir.

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 4 & 6 & 7 & 5 & 1 & 3 & 2 & 10 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Teorem

Her permütasyon döngülerin çarpımı olarak, sadece bir şekilde, yazılabilir.

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 4 & 6 & 7 & 5 & 1 & 3 & 2 & 10 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$d_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 4 & 2 & 3 & 5 & 1 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

Döngüler

Teorem

Her permütasyon döngülerin çarpımı olarak, sadece bir şekilde, yazılabilir.

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 4 & 6 & 7 & 5 & 1 & 3 & 2 & 10 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$d_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 4 & 2 & 3 & 5 & 1 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

$$d_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 1 & 6 & 7 & 4 & 5 & 3 & 2 & 8 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

Teorem

Her permütasyon döngülerin çarpımı olarak, sadece bir şekilde, yazılabilir.

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 4 & 6 & 7 & 5 & 1 & 3 & 2 & 10 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$d_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 4 & 2 & 3 & 5 & 1 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

$$d_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 1 & 6 & 7 & 4 & 5 & 3 & 2 & 8 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

$$d_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 10 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Teorem

Her permütasyon döngülerin çarpımı olarak, sadece bir şekilde, yazılabilir.

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 4 & 6 & 7 & 5 & 1 & 3 & 2 & 10 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$d_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 4 & 2 & 3 & 5 & 1 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

$$d_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 1 & 6 & 7 & 4 & 5 & 3 & 2 & 8 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

$$d_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 10 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

f permütasyonunu $f = d_1 \cdot d_2 \cdot d_3 = (1,4,5)(2,6,3,7)(8,10,9)$ şeklinde yazabiliriz.

Yer değiştirmeler

2 uzunluğundaki bir döngüye **yer değiştirme** (transpozisyon) denir.

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 8 & 4 & 5 & 6 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

Yer değiştirmeler

2 uzunluğundaki bir döngüye **yer değiştirme** (transpozisyon) denir.

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 8 & 4 & 5 & 6 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

Yer değiştirmeler

2 uzunluğundaki bir döngüye **yer değiştirme** (transpozisyon) denir.

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 8 & 4 & 5 & 6 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

$$3 \rightleftarrows 8$$

Yer değiştirmeler

2 uzunluğundaki bir döngüye **yer değiştirme** (transpozisyon) denir.

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 8 & 4 & 5 & 6 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{tikzcd} 3 \arrow[r, bend left] & 8 \arrow[l, bend left] \end{tikzcd}$$

f'yi kısaca $(3, 8)$ şeklinde gösterelim.

Yer değiştirmeleri çarpma:

$(1, 2)(3, 5)(6, 4)$

Yer değiştirmeler

2 uzunluğundaki bir döngüye **yer değiştirme** (transpozisyon) denir.

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 8 & 4 & 5 & 6 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

$$3 \rightleftarrows 8$$

f'yi kısaca $(3,8)$ şeklinde gösterelim.

Yer değiştirmeleri çarpma:

$$(1,2)(3,5)(6,4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 5 & 6 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Yer değiştirmeler

2 uzunluğundaki bir döngüye **yer değiştirme** (transpozisyon) denir.

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 8 & 4 & 5 & 6 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{tikzcd} 3 \arrow[r, bend left] & 8 \arrow[l, bend left] \end{tikzcd}$$

f'yi kısaca $(3, 8)$ şeklinde gösterelim.

Yer değiştirmeleri çarpma:

$$(1, 2)(3, 5)(6, 4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 5 & 6 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$(1, 2)(3, 1)(6, 2) =$$

2 uzunluğundaki bir döngüye **yer değiştirme** (transpozisyon) denir.

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 8 & 4 & 5 & 6 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

$$3 \rightleftarrows 8$$

f'yi kısaca $(3, 8)$ şeklinde gösterelim.

Yer değiştirmeleri çarpma:

$$(1,2)(3,5)(6,4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 5 & 6 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$(1,2)(3,1)(6,2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 3 & 1 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Yer değiştirmeler

Yer değiştirmeler

Teorem

Her permütasyon yer değiştirmelerin çarpımı olarak yazılabilir.

Yer değiştirmeler

Teorem

Her permütasyon yer değiştirmelerin çarpımı olarak yazılabilir.

1. İspat:

Teorem

Her permütasyon yer değiştirmelerin çarpımı olarak yazılabilir.

1. İspat:

Yer değiştirmeler

Teorem

Her permütasyon yer değiştirmelerin çarpımı olarak yazılabilir.

1. İspat:

2. İspat:

Yer değiştirmeler

Teorem

Her permütasyon yer değiştirmelerin çarpımı olarak yazılabilir.

1. İspat:

2. İspat: Her permütasyonun döngülerin çarpımı olarak yazılabileceğini gördük. Dolayısıyla, her döngünün yer değiştirmelerin çarpımı olarak yazılabileceğini göstermemiz yeterli.

Yer değiştirmeler

Yer değiştirmeler

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 5 & 4 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$t_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = (1,3)$$

Yer değiştirmeler

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 5 & 4 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$t_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = (1,3)$$

$$t_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 3 & 4 & 1 & 6 \end{pmatrix} = (1,5)$$

Yer değiştirmeler

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 5 & 4 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$t_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = (1,3)$$

$$t_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 3 & 4 & 1 & 6 \end{pmatrix} = (1,5)$$

$$t_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} = (1,6)$$

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 5 & 4 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$t_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = (1,3)$$

$$t_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 3 & 4 & 1 & 6 \end{pmatrix} = (1,5)$$

$$t_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} = (1,6)$$

$f = (1,3)(1,5)(1,6) = t_1 \cdot t_2 \cdot t_3$ şeklinde yazabiliriz.

Yer değiştirmeler

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 5 & 4 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$t_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = (1,3)$$

$$t_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 3 & 4 & 1 & 6 \end{pmatrix} = (1,5)$$

$$t_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} = (1,6)$$

$f = (1,3)(1,5)(1,6) = t_1 \cdot t_2 \cdot t_3$ şeklinde yazabiliriz.

Dikkat, bunu farklı şekilde de yapabilirdik!

Yer değiştirmeler

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 5 & 4 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

Yer değiştirmeler

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 5 & 4 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 5 & 6 \end{pmatrix} = (2,4)$$

Yer değiştirmeler

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 5 & 4 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 5 & 6 \end{pmatrix} = (2,4)$$

$$T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 & 4 & 3 & 6 \end{pmatrix} = (3,5)$$

Yer değiştirmeler

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 5 & 4 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 5 & 6 \end{pmatrix} = (2,4)$$

$$T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 & 4 & 3 & 6 \end{pmatrix} = (3,5)$$

$$T_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 3 & 4 & 1 & 6 \end{pmatrix} = (1,5)$$

Yer değiştirmeler

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 5 & 4 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 5 & 6 \end{pmatrix} = (2,4)$$

$$T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 & 4 & 3 & 6 \end{pmatrix} = (3,5)$$

$$T_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 3 & 4 & 1 & 6 \end{pmatrix} = (1,5)$$

$$T_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix} = (5,6)$$

Yer değiştirmeler

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 5 & 4 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 5 & 6 \end{pmatrix} = (2,4)$$

$$T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 & 4 & 3 & 6 \end{pmatrix} = (3,5)$$

$$T_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 3 & 4 & 1 & 6 \end{pmatrix} = (1,5)$$

$$T_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix} = (5,6)$$

$$T_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 5 & 6 \end{pmatrix} = (2,4)$$

Yer değiştirmeler

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 5 & 4 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 5 & 6 \end{pmatrix} = (2,4)$$

$$T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 & 4 & 3 & 6 \end{pmatrix} = (3,5)$$

$$T_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 3 & 4 & 1 & 6 \end{pmatrix} = (1,5)$$

$$T_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix} = (5,6)$$

$$T_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 5 & 6 \end{pmatrix} = (2,4)$$

$f = (2,4)(5,6)(5,1)(5,3)(2,4) = T_1 \cdot T_2 \cdot T_3 \cdot T_4 \cdot T_5$ şeklinde de yazabiliriz.

Yer değiştirmeler

Genel olarak, $f = (a_1, a_2, \ldots, a_k)$ bir döngü ise f'yi

$$f = (a_1, a_2)(a_1, a_3) \cdots (a_1, a_{k-1})(a_1, a_k)$$

şeklinde yer değiştirmelerin çarpımı olarak yazabiliriz.

Yer değiştirmeler

Genel olarak, $f = (a_1, a_2, \ldots, a_k)$ bir döngü ise f'yi

$$f = (a_1, a_2)(a_1, a_3) \cdots (a_1, a_{k-1})(a_1, a_k)$$

şeklinde yer değiştirmelerin çarpımı olarak yazabiliriz.

Yukarıda da gözlemlediğimiz gibi bunu farklı şekillerde yapabiliriz.

Yer değiştirmeler

Genel olarak, $f = (a_1, a_2, \ldots, a_k)$ bir döngü ise f'yi

$$f = (a_1, a_2)(a_1, a_3) \cdots (a_1, a_{k-1})(a_1, a_k)$$

şeklinde yer değiştirmelerin çarpımı olarak yazabiliriz.

Yukarıda da gözlemlediğimiz gibi bunu farklı şekillerde yapabiliriz.

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 5 & 4 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

Genel olarak, $f = (a_1, a_2, \ldots, a_k)$ bir döngü ise f'yi

$$f = (a_1, a_2)(a_1, a_3)\cdots(a_1, a_{k-1})(a_1, a_k)$$

şeklinde yer değiştirmelerin çarpımı olarak yazabiliriz.

Yukarıda da gözlemlediğimiz gibi bunu farklı şekillerde yapabiliriz.

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 5 & 4 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f = (1,3)(1,5)(1,6) = (2,4)(5,6)(5,1)(5,3)(2,4)$$

Ana Teorem

Teorem

Bir permütasyonunun yer değiştirmelerin çarpımı olarak yazımında, yer değiştirmelerin sayısı ya hep çifttir ya da hep tektir.

Teorem

Bir permütasyonunun yer değiștirmelerin çarpımı olarak yazımında, yer değiștirmelerin sayısı ya hep çifttir ya da hep tektir.

İspat:

Ana Teorem

Teorem

Bir permütasyonunun yer değiştirmelerin çarpımı olarak yazımında, yer değiştirmelerin sayısı ya hep çifttir ya da hep tektir.

İspat: Öncelikle permütasyonları iki sınıfa ayıralım:

Ana Teorem

Teorem

Bir permütasyonunun yer değiştirmelerin çarpımı olarak yazımında, yer değiştirmelerin sayısı ya hep çifttir ya da hep tektir.

İspat: Öncelikle permütasyonları iki sınıfa ayıralım:
Daha önce gözlemlediğimiz gibi her permütasyon döngülerin çarpımı şeklinde yazılabilir.

Ana Teorem

Teorem

Bir permütasyonunun yer değiştirmelerin çarpımı olarak yazımında, yer değiştirmelerin sayısı ya hep çifttir ya da hep tektir.

İspat: Öncelikle permütasyonları iki sınıfa ayıralım:
Daha önce gözlemlediğimiz gibi her permütasyon döngülerin çarpımı şeklinde yazılabilir.
Bu yazımdaki döngülerin sayısına bakalım (bir uzunluğundaki döngüler dahil). Bu sayı çift ise permütasyona A tipi, tek ise B tipi diyelim.

Teorem

Bir permütasyonunun yer değiştirmelerin çarpımı olarak yazımında, yer değiştirmelerin sayısı ya hep çifttir ya da hep tektir.

İspat: Öncelikle permütasyonları iki sınıfa ayıralım:
Daha önce gözlemlediğimiz gibi her permütasyon döngülerin çarpımı şeklinde yazılabilir.
Bu yazımdaki döngülerin sayısına bakalım (bir uzunluğundaki döngüler dahil). Bu sayı çift ise permütasyona A tipi, tek ise B tipi diyelim.

Örneğin:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & 6 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

Ana Teorem

Teorem

Bir permütasyonunun yer değiştirmelerin çarpımı olarak yazımında, yer değiştirmelerin sayısı ya hep çifttir ya da hep tektir.

İspat: Öncelikle permütasyonları iki sınıfa ayıralım:
Daha önce gözlemlediğimiz gibi her permütasyon döngülerin çarpımı şeklinde yazılabilir.
Bu yazımdaki döngülerin sayısına bakalım (bir uzunluğundaki döngüler dahil). Bu sayı çift ise permütasyona A tipi, tek ise B tipi diyelim.

Örneğin:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & 6 & 7 & 5 \end{pmatrix} = (1)(2,3,4)(5,6,7)$$

Ana Teorem

Teorem

Bir permütasyonunun yer değiştirmelerin çarpımı olarak yazımında, yer değiştirmelerin sayısı ya hep çifttir ya da hep tektir.

İspat: Öncelikle permütasyonları iki sınıfa ayıralım:
Daha önce gözlemlediğimiz gibi her permütasyon döngülerin çarpımı şeklinde yazılabilir.
Bu yazımdaki döngülerin sayısına bakalım (bir uzunluğundaki döngüler dahil). Bu sayı çift ise permütasyona A tipi, tek ise B tipi diyelim.

Örneğin:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & 6 & 7 & 5 \end{pmatrix} = (1)(2,3,4)(5,6,7) \text{ B tipi}$$

Ana Teorem

Teorem

Bir permütasyonunun yer değiştirmelerin çarpımı olarak yazımında, yer değiştirmelerin sayısı ya hep çifttir ya da hep tektir.

İspat: Öncelikle permütasyonları iki sınıfa ayıralım:
Daha önce gözlemlediğimiz gibi her permütasyon döngülerin çarpımı şeklinde yazılabilir.
Bu yazımdaki döngülerin sayısına bakalım (bir uzunluğundaki döngüler dahil). Bu sayı çift ise permütasyona A tipi, tek ise B tipi diyelim.

Örneğin:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & 6 & 7 & 5 \end{pmatrix} = (1)(2,3,4)(5,6,7) \text{ B tipi}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 & 6 & 7 \end{pmatrix} =$$

Teorem

Bir permütasyonunun yer değiştirmelerin çarpımı olarak yazımında, yer değiştirmelerin sayısı ya hep çifttir ya da hep tektir.

İspat: Öncelikle permütasyonları iki sınıfa ayıralım:
Daha önce gözlemlediğimiz gibi her permütasyon döngülerin çarpımı şeklinde yazılabilir.
Bu yazımdaki döngülerin sayısına bakalım (bir uzunluğundaki döngüler dahil). Bu sayı çift ise permütasyona A tipi, tek ise B tipi diyelim.

Örneğin:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & 6 & 7 & 5 \end{pmatrix} = (1)(2,3,4)(5,6,7) \text{ B tipi}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 & 6 & 7 \end{pmatrix} = (1,2)(3,4,5)(6)(7)$$

Teorem

Bir permütasyonunun yer değiştirmelerin çarpımı olarak yazımında, yer değiştirmelerin sayısı ya hep çifttir ya da hep tektir.

İspat: Öncelikle permütasyonları iki sınıfa ayıralım:
Daha önce gözlemlediğimiz gibi her permütasyon döngülerin çarpımı şeklinde yazılabilir.
Bu yazımdaki döngülerin sayısına bakalım (bir uzunluğundaki döngüler dahil). Bu sayı çift ise permütasyona A tipi, tek ise B tipi diyelim.

Örneğin:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & 6 & 7 & 5 \end{pmatrix} = (1)(2,3,4)(5,6,7) \text{ B tipi}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 & 6 & 7 \end{pmatrix} = (1,2)(3,4,5)(6)(7) \text{ A tipi}$$

Ana Teorem

Ana Teorem

f bir permütasyon olsun ve (a, b) de bir yer değiştirme olsun.

Ana Teorem

f bir permütasyon olsun ve (a, b) de bir yer değiştirme olsun.
f, p tane döngünün çarpımı olarak yazılmış olsun.

Ana Teorem

f bir permütasyon olsun ve (a, b) de bir yer değiştirme olsun.
f, p tane döngünün çarpımı olarak yazılmış olsun.

1. Durum:

Ana Teorem

f bir permütasyon olsun ve (a, b) de bir yer değiştirme olsun.
f, p tane döngünün çarpımı olarak yazılmış olsun.

1. Durum: a ve b, f deki döngülerden aynı döngü içinde.

Ana Teorem

f bir permütasyon olsun ve (a, b) de bir yer değiştirme olsun.
f, p tane döngünün çarpımı olarak yazılmış olsun.

1. Durum: a ve b, f deki döngülerden aynı döngü içinde.

$$(a, a_1, a_2, \ldots, a_m, b, b_1, b_2, \ldots, b_k) \cdot (a, b) = (a, a_1, \ldots, a_m)(b, b_1, b_2, \ldots, b_k)$$

Ana Teorem

f bir permütasyon olsun ve (a, b) de bir yer değiştirme olsun.
f, p tane döngünün çarpımı olarak yazılmış olsun.

1. Durum: a ve b, f deki döngülerden aynı döngü içinde.

$$(a, a_1, a_2, \ldots, a_m, b, b_1, b_2, \ldots, b_k)\cdot(a, b) = (a, a_1, \ldots, a_m)(b, b_1, b_2, \ldots, b_k)$$

Dolayısıyla $f \cdot (a, b)$ permütasyonu $p + 1$ tane döngünün çarpımı olarak yazılır.

Ana Teorem

f bir permütasyon olsun ve (a, b) de bir yer değiştirme olsun.
f, p tane döngünün çarpımı olarak yazılmış olsun.

1. Durum: a ve b, f deki döngülerden aynı döngü içinde.

$$(a, a_1, a_2, \ldots, a_m, b, b_1, b_2, \ldots, b_k) \cdot (a, b) = (a, a_1, \ldots, a_m)(b, b_1, b_2, \ldots, b_k)$$

Dolayısıyla $f \cdot (a, b)$ permütasyonu $p + 1$ tane döngünün çarpımı olarak yazılır.

2. Durum:

Ana Teorem

f bir permütasyon olsun ve (a, b) de bir yer değiştirme olsun.
f, p tane döngünün çarpımı olarak yazılmış olsun.

1. Durum: a ve b, f deki döngülerden aynı döngü içinde.

$$(a, a_1, a_2, \ldots, a_m, b, b_1, b_2, \ldots, b_k)\cdot(a, b) = (a, a_1, \ldots, a_m)(b, b_1, b_2, \ldots, b_k)$$

Dolayısıyla $f \cdot (a, b)$ permütasyonu $p + 1$ tane döngünün çarpımı olarak yazılır.

2. Durum: a ve b, f deki farklı döngülerin içinde.

Ana Teorem

f bir permütasyon olsun ve (a, b) de bir yer değiştirme olsun.
f, p tane döngünün çarpımı olarak yazılmış olsun.

1. Durum: a ve b, f deki döngülerden aynı döngü içinde.

$$(a, a_1, a_2, \ldots, a_m, b, b_1, b_2, \ldots, b_k)\cdot(a, b) = (a, a_1, \ldots, a_m)(b, b_1, b_2, \ldots, b_k)$$

Dolayısıyla $f \cdot (a, b)$ permütasyonu $p + 1$ tane döngünün çarpımı olarak yazılır.

2. Durum: a ve b, f deki farklı döngülerin içinde.

$$(a, a_1, a_2, \ldots, a_m)\cdot(b, b_1, b_2, \ldots, b_k)\cdot(a, b) = (a, a_1, \ldots, a_m, b, b_1, b_2 \ldots, b_k)$$

Ana Teorem

f bir permütasyon olsun ve (a, b) de bir yer değiştirme olsun.
f, p tane döngünün çarpımı olarak yazılmış olsun.

1. Durum: a ve b, f deki döngülerden aynı döngü içinde.

$$(a, a_1, a_2, \ldots, a_m, b, b_1, b_2, \ldots, b_k)\cdot(a, b) = (a, a_1, \ldots, a_m)(b, b_1, b_2, \ldots, b_k)$$

Dolayısıyla $f \cdot (a, b)$ permütasyonu $p + 1$ tane döngünün çarpımı olarak yazılır.

2. Durum: a ve b, f deki farklı döngülerin içinde.

$$(a, a_1, a_2, \ldots, a_m)\cdot(b, b_1, b_2, \ldots, b_k)\cdot(a, b) = (a, a_1, \ldots, a_m, b, b_1, b_2 \ldots, b_k)$$

Dolayısıyla $f \cdot (a, b)$ permütasyonu $p - 1$ tane döngünün çarpımı olarak yazılır.

Ana Teorem

f bir permütasyon olsun ve (a, b) de bir yer değiştirme olsun.
f, p tane döngünün çarpımı olarak yazılmış olsun.

1. Durum: a ve b, f deki döngülerden aynı döngü içinde.

$$(a, a_1, a_2, \dots, a_m, b, b_1, b_2, \dots, b_k)\cdot(a, b) = (a, a_1, \dots, a_m)(b, b_1, b_2, \dots, b_k)$$

Dolayısıyla $f \cdot (a, b)$ permütasyonu $p + 1$ tane döngünün çarpımı olarak yazılır.

2. Durum: a ve b, f deki farklı döngülerin içinde.

$$(a, a_1, a_2, \dots, a_m)\cdot(b, b_1, b_2, \dots, b_k)\cdot(a, b) = (a, a_1, \dots, a_m, b, b_1, b_2 \dots, b_k)$$

Dolayısıyla $f \cdot (a, b)$ permütasyonu $p - 1$ tane döngünün çarpımı olarak yazılır.

Sonuç olarak: f ve $f \cdot (a, b)$ nin tipleri farklıdır.

Ana Teorem

Daha genel olarak:

Ana Teorem

Daha genel olarak:

f bir permütasyon ve $t_1, t_2, \ldots, t_k$ de yer değiştirmeler olsun.

Ana Teorem

Daha genel olarak:

f bir permütasyon ve $t_1, t_2, \ldots, t_k$ de yer değiştirmeler olsun.

Eğer k çift ise f ve $f \cdot t_1 \cdot t_2 \cdots t_k$ aynı tiptendir.

Ana Teorem

Daha genel olarak:

f bir permütasyon ve $t_1, t_2, \ldots, t_k$ de yer değiştirmeler olsun.

Eğer k çift ise f ve $f \cdot t_1 \cdot t_2 \cdots t_k$ aynı tiptendir.
Eğer k tek ise f ve $f \cdot t_1 \cdot t_2 \cdots t_k$ farklı tiptendir.

Daha genel olarak:

f bir permütasyon ve $t_1, t_2, \ldots, t_k$ de yer değiştirmeler olsun.

Eğer k çift ise f ve $f \cdot t_1 \cdot t_2 \cdots t_k$ aynı tiptendir.
Eğer k tek ise f ve $f \cdot t_1 \cdot t_2 \cdots t_k$ farklı tiptendir.

Ana Teoremin İspatı:

Ana Teorem

Daha genel olarak:

f bir permütasyon ve $t_1, t_2, \ldots, t_k$ de yer değiştirmeler olsun.

Eğer k çift ise f ve $f \cdot t_1 \cdot t_2 \cdots t_k$ aynı tiptendir.
Eğer k tek ise f ve $f \cdot t_1 \cdot t_2 \cdots t_k$ farklı tiptendir.

Ana Teoremin İspatı: f bir permütasyon olsun.

Daha genel olarak:

f bir permütasyon ve $t_1, t_2, \ldots, t_k$ de yer değiştirmeler olsun.

Eğer k çift ise f ve $f \cdot t_1 \cdot t_2 \cdots t_k$ aynı tiptendir.
Eğer k tek ise f ve $f \cdot t_1 \cdot t_2 \cdots t_k$ farklı tiptendir.

Ana Teoremin İspatı: f bir permütasyon olsun. f nin iki farklı şekilde yer değiştirmelerin çarpımı olarak yazıldığını varsayalım:

Daha genel olarak:

f bir permütasyon ve $t_1, t_2, \ldots, t_k$ de yer değiştirmeler olsun.

Eğer k çift ise f ve $f \cdot t_1 \cdot t_2 \cdots t_k$ aynı tiptendir.
Eğer k tek ise f ve $f \cdot t_1 \cdot t_2 \cdots t_k$ farklı tiptendir.

Ana Teoremin İspatı: f bir permütasyon olsun. f nin iki farklı şekilde yer değiştirmelerin çarpımı olarak yazıldığını varsayalım:

$$f = t_1 \cdot t_2 \cdots t_k \text{ ve } f = T_1 \cdot T_2 \cdots T_m$$

Ana Teorem

Daha genel olarak:

f bir permütasyon ve $t_1, t_2, \ldots, t_k$ de yer değiştirmeler olsun.

Eğer k çift ise f ve $f \cdot t_1 \cdot t_2 \cdots t_k$ aynı tiptendir.
Eğer k tek ise f ve $f \cdot t_1 \cdot t_2 \cdots t_k$ farklı tiptendir.

Ana Teoremin İspatı: f bir permütasyon olsun. f nin iki farklı şekilde yer değiştirmelerin çarpımı olarak yazıldığını varsayalım:

$$f = t_1 \cdot t_2 \cdots t_k \ \text{ ve } \ f = T_1 \cdot T_2 \cdots T_m$$

e birim permütasyon olmak üzere

Ana Teorem

Daha genel olarak:

f bir permütasyon ve $t_1, t_2, \ldots, t_k$ de yer değiştirmeler olsun.

Eğer k çift ise f ve $f \cdot t_1 \cdot t_2 \cdots t_k$ aynı tiptendir.
Eğer k tek ise f ve $f \cdot t_1 \cdot t_2 \cdots t_k$ farklı tiptendir.

Ana Teoremin İspatı: f bir permütasyon olsun. f nin iki farklı şekilde yer değiştirmelerin çarpımı olarak yazıldığını varsayalım:

$$f = t_1 \cdot t_2 \cdots t_k \text{ ve } f = T_1 \cdot T_2 \cdots T_m$$

e birim permütasyon olmak üzere

$$f = e \cdot f = e \cdot t_1 \cdot t_2 \cdots t_k \text{ ve } f = e \cdot f = e \cdot T_1 \cdot T_2 \cdots T_m$$

olduğundan,

Ana Teorem

Daha genel olarak:

f bir permütasyon ve $t_1, t_2, \ldots, t_k$ de yer değiştirmeler olsun.

Eğer k çift ise f ve $f \cdot t_1 \cdot t_2 \cdots t_k$ aynı tiptendir.
Eğer k tek ise f ve $f \cdot t_1 \cdot t_2 \cdots t_k$ farklı tiptendir.

Ana Teoremin İspatı: f bir permütasyon olsun. f nin iki farklı şekilde yer değiştirmelerin çarpımı olarak yazıldığını varsayalım:

$$f = t_1 \cdot t_2 \cdots t_k \text{ ve } f = T_1 \cdot T_2 \cdots T_m$$

e birim permütasyon olmak üzere

$$f = e \cdot f = e \cdot t_1 \cdot t_2 \cdots t_k \text{ ve } f = e \cdot f = e \cdot T_1 \cdot T_2 \cdots T_m$$

olduğundan, $e \cdot t_1 \cdot t_2 \cdots t_k$ ve $e \cdot T_1 \cdot T_2 \cdots T_m$ aynı tipte olmak zorundadır.

Daha genel olarak:

f bir permütasyon ve $t_1, t_2, \ldots, t_k$ de yer değiştirmeler olsun.

Eğer k çift ise f ve $f \cdot t_1 \cdot t_2 \cdots t_k$ aynı tiptendir.
Eğer k tek ise f ve $f \cdot t_1 \cdot t_2 \cdots t_k$ farklı tiptendir.

Ana Teoremin İspatı: f bir permütasyon olsun. f nin iki farklı şekilde yer değiştirmelerin çarpımı olarak yazıldığını varsayalım:

$$f = t_1 \cdot t_2 \cdots t_k \ \text{ ve } \ f = T_1 \cdot T_2 \cdots T_m$$

e birim permütasyon olmak üzere

$$f = e \cdot f = e \cdot t_1 \cdot t_2 \cdots t_k \ \text{ ve } \ f = e \cdot f = e \cdot T_1 \cdot T_2 \cdots T_m$$

olduğundan, $e \cdot t_1 \cdot t_2 \cdots t_k$ ve $e \cdot T_1 \cdot T_2 \cdots T_m$ aynı tipte olmak zorundadır.
Dolayısıyla, k ve m sayılarından birisi çift diğeri tek olamaz.

Tek ve çift permütasyonlar

Tek sayıda yer değiştirmenin çarpımı olarak yazılan permütasyonlara **tek permütasyon**, çift sayıda yer değiştirmenin çarpımı olarak yazılan permütasyonlara **çift permütasyon** diyelim.

Tek ve çift permütasyonlar

Tek sayıda yer değiştirmenin çarpımı olarak yazılan permütasyonlara **tek permütasyon**, çift sayıda yer değiştirmenin çarpımı olarak yazılan permütasyonlara **çift permütasyon** diyelim.
Ana teoremden dolayı her permütasyon ya çifttir ya da tektir.

Tek ve çift permütasyonlar

Tek sayıda yer değiştirmenin çarpımı olarak yazılan permütasyonlara **tek permütasyon**, çift sayıda yer değiştirmenin çarpımı olarak yazılan permütasyonlara **çift permütasyon** diyelim.
Ana teoremden dolayı her permütasyon ya çifttir ya da tektir.

Örneğin:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 & 6 & 7 \end{pmatrix} =$$

Tek ve çift permütasyonlar

Tek sayıda yer değiştirmenin çarpımı olarak yazılan permütasyonlara **tek permütasyon**, çift sayıda yer değiştirmenin çarpımı olarak yazılan permütasyonlara **çift permütasyon** diyelim.
Ana teoremden dolayı her permütasyon ya çifttir ya da tektir.

Örneğin:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 & 6 & 7 \end{pmatrix} = (1,2)(3,4)(3,5)$$

Tek ve çift permütasyonlar

Tek sayıda yer değiştirmenin çarpımı olarak yazılan permütasyonlara **tek permütasyon**, çift sayıda yer değiştirmenin çarpımı olarak yazılan permütasyonlara **çift permütasyon** diyelim.
Ana teoremden dolayı her permütasyon ya çifttir ya da tektir.

Örneğin:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 & 6 & 7 \end{pmatrix} = (1,2)(3,4)(3,5) \text{ tek permütasyondur.}$$

Tek ve çift permütasyonlar

Tek sayıda yer değiştirmenin çarpımı olarak yazılan permütasyonlara **tek permütasyon**, çift sayıda yer değiştirmenin çarpımı olarak yazılan permütasyonlara **çift permütasyon** diyelim.
Ana teoremden dolayı her permütasyon ya çifttir ya da tektir.

Örneğin:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 & 6 & 7 \end{pmatrix} = (1,2)(3,4)(3,5) \text{ tek permütasyondur.}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 & 7 & 6 \end{pmatrix} =$$

Tek ve çift permütasyonlar

Tek sayıda yer değiştirmenin çarpımı olarak yazılan permütasyonlara **tek permütasyon**, çift sayıda yer değiştirmenin çarpımı olarak yazılan permütasyonlara **çift permütasyon** diyelim.
Ana teoremden dolayı her permütasyon ya çifttir ya da tektir.

Örneğin:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 & 6 & 7 \end{pmatrix} = (1,2)(3,4)(3,5) \text{ tek permütasyondur.}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 & 7 & 6 \end{pmatrix} = (1,2)(3,5)(3,4)(6,7)$$

Tek ve çift permütasyonlar

Tek sayıda yer değiştirmenin çarpımı olarak yazılan permütasyonlara **tek permütasyon**, çift sayıda yer değiştirmenin çarpımı olarak yazılan permütasyonlara **çift permütasyon** diyelim.
Ana teoremden dolayı her permütasyon ya çifttir ya da tektir.

Örneğin:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 & 6 & 7 \end{pmatrix} = (1,2)(3,4)(3,5) \text{ tek permütasyondur.}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 & 7 & 6 \end{pmatrix} = (1,2)(3,5)(3,4)(6,7) \text{ çift permütasyondur.}$$

Tek ve çift permütasyonlar

Tek sayıda yer değiştirmenin çarpımı olarak yazılan permütasyonlara **tek permütasyon**, çift sayıda yer değiştirmenin çarpımı olarak yazılan permütasyonlara **çift permütasyon** diyelim.
Ana teoremden dolayı her permütasyon ya çifttir ya da tektir.

Örneğin:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 & 6 & 7 \end{pmatrix} = (1,2)(3,4)(3,5) \text{ tek permütasyondur.}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 & 7 & 6 \end{pmatrix} = (1,2)(3,5)(3,4)(6,7) \text{ çift permütasyondur.}$$

Birim permütasyon $e = (1,2)(2,1)$ olduğundan çift permütasyondur.

Tek ve çift permütasyonlar

Tek sayıda yer değiştirmenin çarpımı olarak yazılan permütasyonlara **tek permütasyon**, çift sayıda yer değiştirmenin çarpımı olarak yazılan permütasyonlara **çift permütasyon** diyelim.
Ana teoremden dolayı her permütasyon ya çifttir ya da tektir.

Örneğin:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 & 6 & 7 \end{pmatrix} = (1,2)(3,4)(3,5) \text{ tek permütasyondur.}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 & 7 & 6 \end{pmatrix} = (1,2)(3,5)(3,4)(6,7) \text{ çift permütasyondur.}$$

Birim permütasyon $e = (1,2)(2,1)$ olduğundan çift permütasyondur.

$S = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ kümesinin $\frac{n!}{2}$ tane çift ve $\frac{n!}{2}$ tane tek permütasyonu vardır.

15 Bulmacası

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	16

15 Bulmacası

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	16

Oyunun çözümü $\{1, 2, 3, \ldots, 16\}$ kümesinin bir permütasyonudur.

15 Bulmacası

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	16

Oyunun çözümü $\{1, 2, 3, \ldots, 16\}$ kümesinin bir permütasyonudur.

Eğer parçaları yerinden sökebilseydik $(14, 15)$ yer değiştirmesi ile oyunu çözebilirdik.

15 Bulmacası

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	16

Oyunun çözümü $\{1, 2, 3, \dots, 16\}$ kümesinin bir permütasyonudur.

Eğer parçaları yerinden sökebilseydik $(14, 15)$ yer değiştirmesi ile oyunu çözebilirdik.

Parçaları kaydırarak yaptığımız her çözümde çift sayıda yer değiştirme olmak zorunda. Dolayısıyla parçaları kaydırarak bulmacayı çözemeyiz.

Genel olarak, başlangıç durumu bir tek permütasyon ise bulmacanın çözümü yoktur.

15 Bulmacası

Genel olarak, başlangıç durumu bir tek permütasyon ise bulmacanın çözümü yoktur.

Teorem

15 bulmacasının başlangıç durumu bir çift permütasyon ise çözümü vardır.

15 Bulmacası

Genel olarak, başlangıç durumu bir tek permütasyon ise bulmacanın çözümü yoktur.

Teorem

15 bulmacasının başlangıç durumu bir çift permütasyon ise çözümü vardır.

2	1	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

15 Bulmacası

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

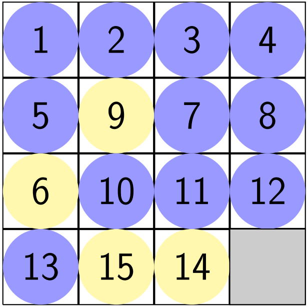
15 Bulmacası

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

15 Bulmacası

1	2	3	4
5	9	7	8
6	10	11	12
13	15	14	

15 Bulmacası



Dolayısıyla, parçalar kare yerine daire olduğu durumda bulmaca çözülebilir.

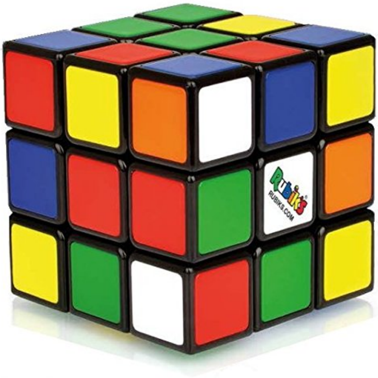
15 Bulmacası

15 Bulmacası

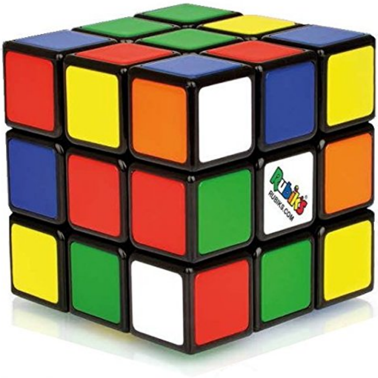
Start | Move order to Vertical | Turn Box 90°ccw | Turn Blocks 90°cw

100 yıl sonra, 1980 Ernő Rubik

100 yıl sonra, 1980 Ernő Rubik



100 yıl sonra, 1980 Ernő Rubik



Dinlediğiniz için teşekkür ederim!